Análise Matemática III

LEI, LMA, MIEET

Ana Conceição

2011/2012

aconcei@ualg.pt

Conteúdos Programáticos:

1. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

Funções reais de várias variáveis reais:

1.1. Definição. Representação geométrica.

1.2. Domínio e seu esboço gráfico.

1.3. Limite e continuidade.

1.4. Derivadas parciais e sua interpretação geométrica. Funções homogéneas. Igualdade de Euler.

1.5. Diferencial total. Cálculos aproximados.

1.6. Derivada parciais de uma função composta. Derivada total.

1.7. Derivadas parciais de ordem superior. Fórmula de Taylor.

1.8. Funções implícitas. Derivadas de funções implícitas.

1.9. Estudo da variação das funções: condições necessárias para a existência de extremo, condições suficientes para a existência de extremo.

2. Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$

2.1. Integrais duplos: interpretação geométrica, propriedades elementares, cálculo, aplicações ao cálculo de áreas e de volumes, mudança de variáveis.

2.2. Integrais triplos: interpretação geométrica e física, propriedades elementares, cálculo, aplicação ao cálculo de volumes, mudança de variáveis.

2.3. Curvas e superfícies: equação de uma curva no plano e no espaço, comprimento de uma curva, plano tangente a uma superfície num ponto, reta normal a uma superfície num ponto.

2.4. Elementos da teoria do campo: campo escalar, derivada segundo uma dada direcção, gradiente, campo vectorial, rotacional, divergência.

2.5. Integral curvilíneo: interpretação física, propriedades elementares, fórmula de Green, condições para que um integral de linha não dependa do caminho de integração.

Mathematica ↷
- http://www.wolfram.com/

Wolfram|Alpha ↷
- http://www.wolframalpha.com

Wolfram Demonstrations Project ↷
- http://demonstrations.wolfram.com

Realização de 2 testes, dando ao aluno a possibilidade de obter aproveitamento à disciplina sem se submeter a qualquer exame:

1º teste no dia 14 de março:

8:30 às 10:00 (LEI + LMA + MIEET)

2º teste no dia 18 de abril:

8:30 às 10:00 (LEI + LMA + MIEET)

Bibliografia básica:

1. Fichas de exercícios de Análise Matemática III (LEI, LMA, MIEET), 2011/2012 - Ana Conceição (tutoria eletrónica)

2. Slides das aulas teóricas de Análise Matemática III (LEI, LMA, MIEET), 2011/2012 - Ana Conceição (tutoria eletrónica)

Bibliografia complementar:

1. Cálculo Diferencial e Integral, Vols I e II - N. Piskounov - Lopes da Silva, 1978

2. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidóvich - Mir, 1977

1. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

Funções reais de várias variáveis reais

É evidente que o estudo das funções de uma só variável real não é suficiente para a análise dos fenómenos da ciência e da natureza, já que muitos deles dependem de vários fatores.

$$f: \ D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, \cdots, x_n) = w$$

Definição: Se a cada n-úplo $(x_1, \cdots, x_n)$ de valores reais de n variáveis independentes x_i, $\forall i = \overline{1, n}$, pertencente a um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, corresponde um valor bem determinado de variável real w, diz-se que w é uma função real de n variáveis reais e denotamos por $w = f(x_1, \cdots, x_n)$.

— — — — — — —

Exemplos:

$a)$ $w = xy + \ln(x-3) + e^y + 2 \ (= f(x, y))$

$b)$ $w = x^2yz + \operatorname{sen} x \ e^z \ (= f(x, y, z))$

$c)$ $w = \dfrac{1}{xyz - u} \ (= f(x, y, z, u))$

Definição: Chama-se domínio de definição da função $w = f(x_1, \cdots, x_n)$ ao conjunto dos n-úplos $(x_1, \cdots, x_n)$ de valores reais x_i, $\forall i = \overline{1, n}$ para os quais $f(x_1, \cdots, x_n)$ faz sentido. Denotamos por D_f.

— — — — — — —

Exemplos:

$a)$ $f(x, y) = xy + \ln(x - 3) + e^y + 2$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3 > 0\}$$

$b)$ $f(x, y, z) = x^2yz + \operatorname{sen} x \; e^z \quad \hookrightarrow \quad D_f = \mathbb{R}^3$

$c)$ $f(x, y, z, u) = \dfrac{1}{xyz - u}$

$$D_f = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : xyz - u \neq 0\}$$

Definição: Se a cada par (x, y) de valores reais de duas variáveis independentes x e y, pertencente a um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, corresponde um valor bem determinado de variável real z, diz-se que z é uma função real de duas variáveis reais e denotamos por $z = f(x, y)$.

— — — — — — —

Exemplos:

$a)$ $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(x - y)$

$b)$ $f(x, y) = \dfrac{\cos x}{x^2 + y^2 + 25} + \sqrt{xy}$

$c)$ $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 3)$

Definição: Chama-se domínio de definição da função $z = f(x, y)$ ao conjunto dos pares (x, y) de valores de x e de y para os quais $f(x, y)$ faz sentido. Denotamos por D_f.

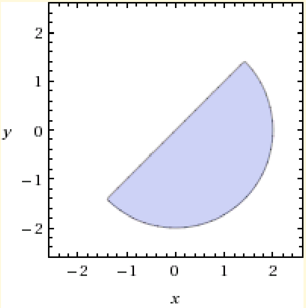
— — — — — — —

Nota: Geometricamente, o domínio de definição de uma função $z = f(x, y)$ é representado no plano OXY.

Exemplos:

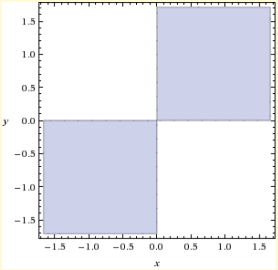
$a)\quad f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x-y)$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4-x^2-y^2\geq 0 \wedge x-y>0\}$$



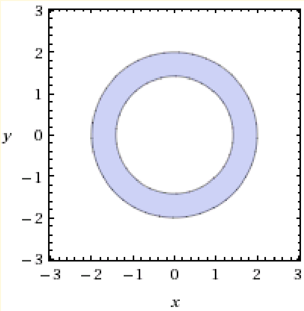
$b)$ $$f(x,y) = \frac{\cos x}{x^2 + y^2 + 25} + \sqrt{xy}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$$



$c)$ $f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 3)$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^2 + y^2 - 3 \leq 1\}$$



Definição: Chama-se gráfico da função f ao subconjunto do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ constituído por todos os pontos $(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))$.

Definição: O lugar geométrico de todos os pontos $(x, y, f(x, y))$ chama-se gráfico da função f e é um subconjunto do espaço $\mathbb{R}^3$.

— — — — — — —

A equação $z = f(x, y)$ define uma superfície no espaço, cuja projeção no plano OXY é o domínio desta função. Cada perpendicular ao plano OXY não corta a superfície em mais do que um ponto.

Seja $z = f(x, y)$ uma função definida num domínio D_f e $P_0(x_0, y_0)$ um ponto do interior ou da fronteira de D_f.

Definição: Diz-se que o número l é o limite da função $f(x, y)$ quando o ponto $P(x, y)$ tende para o ponto $P_0(x_0, y_0)$, e denotamos por

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l,$$

se $\quad \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{(x,y)\in D_f\setminus\{(x_0,y_0)\}} : \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$

$$\Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$

$$\Delta x = x - x_0 \qquad \Delta y = y - y_0$$

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$$

$$|\Delta x| \leq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$$

$$|\Delta y| \leq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$$

— — — — — — —

Observações:

$\diamond$ (x, y) tende para (x_0, y_0) arbitrariamente com a única condição de pertencer ao domínio.

$\diamond$ Se existe o limite da função $f(x, y)$ quando o ponto $P(x, y)$ tende para o ponto $P_0(x_0, y_0)$, então o valor limite da função não depende do caminho percorido.

Exemplos:

$$a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0$$

$$b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0$$

$$c) \quad \lim_{(x,y)\to(4,-2)} (3x-2y) = 16$$

$$d) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

$$e) \quad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+3y}{x+y}$$

$$f) \quad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$$

Estudar o limite em certas restrições do domínio de $f(x,y)$, ou seja, estudar o limite quando (x,y) tende para (x_0,y_0) ao longo de um certo caminho:

- ▷ limites sucessivos
- ▷ limites direcionais
- ▷ ...

- limites sucessivos

  - $$\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right)$$

mantendo y constante obtem-se $\lim_{x \to x_0} f(x,y)$ como função de y. De seguida, calcula-se o limite desta função quando $y \to y_0$.

  - $$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right)$$

mantendo x constante obtem-se $\lim_{y \to y_0} f(x,y)$ como função de x. De seguida, calcula-se o limite desta função quando $x \to x_0$.

- limites direcionais (retas não verticais de declive m que passam por (x_0, y_0))

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ y - y_0 = m(x - x_0)}} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} f(x, m(x - x_0) + y_0)$$

- limites considerando parábolas de eixo vertical que passam por (x_0, y_0))

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ y - y_0 = k(x - x_0)^2}} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} f(x, k(x - x_0)^2 + y_0)$$

Seja $P_0(x_0, y_0)$ um ponto do domínio de definição de $f(x, y)$.

Definição: Diz-se que a função $f(x, y)$ é contínua no ponto $P_0(x_0, y_0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

— — — — — — —

Definição: Uma função contínua em cada ponto de um conjunto, diz-se contínua nesse conjunto.

— — — — — — —

Definição: Se num ponto $P_0(x_0, y_0)$ não é satisfeita a condição de continuidade, diz-se que $P_0(x_0, y_0)$ é um ponto de descontinuidade da função.

Propriedades:

$\diamond$ A soma de duas funções contínuas no ponto (x_0, y_0) é uma função contínua no ponto (x_0, y_0).

$\diamond$ O produto de duas funções contínuas no ponto (x_0, y_0) é uma função contínua no ponto (x_0, y_0).

$\diamond$ O quociente de duas funções contínuas no ponto (x_0, y_0) é uma função contínua no ponto (x_0, y_0), se o denominador é diferente de zero nesse ponto.

$\diamond$ Se $g(x, y)$ é contínua no ponto (x_0, y_0) e a função $f(t)$ é contínua em $t_0 = g(x_0, y_0)$, então a função $(f \circ g)(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0).

Nota:

Funções racionais são contínuas no seu domínio.

Exemplos:

$a)$ $h(x,y)=x^2+y^2$ é contínua em $D_f=\mathbb{R}^2$ pois é uma função racional.

$b)$ $h(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ é contínua em $D_f=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ pois é uma função racional.

$c)$ $h(x,y)=e^{x+y^2}$ é contínua em $D_f=\mathbb{R}^2$ pois $h(x,y)=(f\circ g)(x,y)$, onde $g(x,y)=x+y^2$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ (função racional de domínio $\mathbb{R}^2$) e $f(t)=e^t$ é contínua em $\mathbb{R}$.

$$d) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$ pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

e

$$f(0,0) = 0.$$

Para as funções reais de mais variáveis reais, o limite e a continuidade definem-se analogamente. Por exemplo,

Definição: Diz-se que a função $f(x, y, z)$ é contínua no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$$

Definição: Chamada-se derivada parcial em relação a x (y), da função $z = f(x,y)$ no ponto (x_0, y_0), ao limite

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}\right).$$

— — — — — — —

Nota: A derivada de $z = f(x,y)$ em relação a x (y) é calculada derivando a função considerando $\underline{x}$ (y) <u>variável</u> e supondo $\underline{y}$ (x) <u>constante</u>.

Exemplos:

$$f(x,y) = x^2 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = 1$$

Interpretação geométrica das derivadas parciais

O valor da derivada parcial em relação a x, no ponto (x_0, y_0), é igual à tangente do ângulo formado pela reta tangente à curva, definida pela interseção da superfície $z = f(x, y)$ e do plano $y = y_0$, e o plano OXY. Analogamente, define-se a derivada parcial em relação a y, no ponto (x_0, y_0).

Definição: Chama-se derivada parcial em relação a x_i, da função $z = f(x_1, \cdots, x_n)$, no ponto $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$, ao limite

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_0^1, \cdots, x_0^n) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0^1, \cdots, x_0^i + h, \cdots, x_0^n) - f(x_0^1, \cdots, x_0^n)}{h}.$$

— — — — — — —

Nota: A derivada de $z = f(x_1, \cdots, x_n)$ em relação a x_i é calculada derivando a função $f(x_1, \cdots, x_n)$ considerando $\underline{x_i}$ <u>variável</u> e supondo $\underline{x_j}$, $j \neq i$ <u>constantes</u>.

Seja $z = f(x, y)$. Assim, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ também são funções de x e y.

Definição: As derivadas parciais de $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ chamam-se derivadas parciais de 2ª ordem da função $z = f(x, y)$.

— — — — — — —

Em geral, as derivadas parciais das derivadas de ordem $n - 1$ da função $z = f(x, y)$ chamam-se derivadas parciais de ordem n, de $z = f(x, y)$.

Derivadas parciais de 2ª ordem da função $z = f(x,y)$:

- $\diamondsuit$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx}$$
- $\diamondsuit$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy}$$
- $\diamondsuit$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx}$$
- $\diamondsuit$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \text{derivadas mistas}$$

Teorema: Se a função $z = f(x, y)$ e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

são contínuas no ponto (x_0, y_0) e numa vizinhança de (x_0, y_0), então

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Derivadas parciais de 3ª ordem da função $z = f(x,y)$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

$z = f(x,y)$ tem 2^p derivadas parciais de ordem p.

$$w = f(x, y, z) \quad \text{tem} \quad 3^p \quad \text{derivadas de ordem } p.$$

— — — — — — —

$$y = f(x_1, \cdots, x_n) \ \text{tem} \ n^p \ \text{derivadas parciais de ordem } p.$$

— — — — — — —

Nota: Caso as derivadas parciais sejam contínuas então o resultado da derivação múltipla não depende da ordem dessa derivação.

Exemplos:

$$f(x,y) = x^3 + yx + 2x + 5y - 15$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y + 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 6 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = 0$$

Exemplos:

$$f(x,y,z) = xe^x + \ln(yz) + 2y + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x + xe^x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^x + xe^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

Seja $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0) \in D_f$.

Definição: Se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0) tal que $\forall (x, y) \in \mathcal{V} \cap D_f,\ (x, y) \neq (x_0, y_0)$,

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \qquad (f(x_0, y_0) < f(x, y)),$$

diz-se que a função $z = f(x, y)$ admite um máximo (mínimo) no ponto (x_0, y_0).

Ao(s) máximo(s)/mínimo(s) de $z = f(x, y)$ chamam-se extremos da função.

Teorema (condição necessária para a existência de extremo):
Se a função $z = f(x, y)$ admite um extremo no ponto (x_0, y_0), então as derivadas parciais de 1ª ordem anulam-se no ponto (x_0, y_0) ou não existem.

— — — — — — —

Definição: Seja $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0) \in D_f$. Se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

então (x_0, y_0) chama-se ponto estacionário da função.

Algoritmo ($n=2$)

Passo 1: Resolver

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0, y_0) \text{ ponto estacionário}$$

Passo 2: Determinar

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Passo 3:

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad D_2 = |H(x_0, y_0)|$$

Passo 4:

◇ Se $D_1 > 0$ e $D_2 > 0 \implies f(x_0, y_0)$ mínimo

◇ Se $D_1 < 0$ e $D_2 > 0 \implies f(x_0, y_0)$ máximo

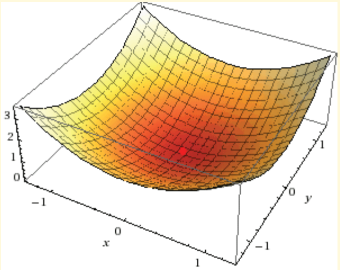
◇ Se $D_2 < 0 \implies f(x_0, y_0)$ não é extremo

◇ Se $D_2 = 0 \implies$ nada se pode concluir (por este método)

Exemplos:

$a)$ $f(x,y) = x^2 + y^2$

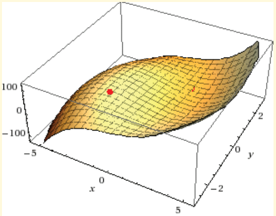
tem um mínimo em $(0,0)$ $\hookrightarrow$ $f(0,0) = 0.$



$b)$ $\quad f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

tem um mínimo em $(2,1)$ $\hookrightarrow$ $f(2,1) = -28$

tem um máximo em $(-2,-1)$ $\hookrightarrow$ $f(-2,-1) = 28.$



Seja $w = f(x_1, \cdots, x_n)$ uma função real de variável real.

Definição: Diz-se que $f(x_1, \cdots, x_n)$ é uma função homogénea de grau k se

$$f(tx_1, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, \cdots, x_n), \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

— — — — — — —

Teorema de Euler: Se $f(x_1, \cdots, x_n)$ é uma função homogénea de grau k, então

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf \quad (\text{igualdade de Euler}).$$

Em particular

Definição: Diz-se que $f(x, y)$ é uma função homogénea de grau k se

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

— — — — — — —

Teorema de Euler: Se $f(x, y)$ é uma função homogénea de grau k, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = kf.$$

Exemplos:

$a)\quad f(x,y) = xy$

é uma função homogénea de grau 2

$$b)\quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

é uma função homogénea de grau 0

$c)\quad f(x,y) = \cos(xy)$

não é uma função homogénea

Seja $f(x_1, \cdots, x_n)$ uma função com derivadas parciais contínuas num ponto $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$.

Definição: Chama-se diferencial total da função $f(x_1, \cdots, x_n)$, no ponto $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, a

$$df(x_1^0, \cdots, x_n^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \cdots, x_n^0) dx_i.$$

$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$

Definição: Chama-se acréscimo total da função $f(x_1, \cdots, x_n)$, no ponto $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, a

$$\triangle f(x_1^0, \cdots, x_n^0) = f(x_1^0 + \triangle x_1, \cdots, x_n^0 + \triangle x_n) - f(x_1^0, \cdots, x_n^0)$$

Seja $f(x,y)$ uma função com derivadas parciais contínuas num ponto (x_0, y_0).

Definição: Chama-se diferencial total da função $f(x,y)$, no ponto (x_0, y_0), a

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

— — — — — — —

Definição: Chama-se acréscimo total da função $f(x,y)$, no ponto (x_0, y_0), a

$$\triangle f(x_0, y_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0).$$

— — — — — — —

$\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$ pequeno $\hookrightarrow$ $\triangle f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)$

$$f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y)$$

$$\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\triangle x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\triangle y$$

Exemplo:

$$(2,03)^2\ln(0,9) \approx f(2,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\triangle x+\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\triangle y$$

$$= 0+0+4(-0,1) = -0,4$$

$f(x,y)=x^2\ln y$	$\triangle x = 0,03$	$\triangle y = -0,1$

$f(2,1)=0$	$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=0$	$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=4$

Fórmula de Taylor

Seja $f(x, y)$ uma função com derivadas parciais continuas, até à 3ª ordem inclusive, numa vizinhança $\mathcal{V}$ do ponto (x_0, y_0). Então, para todo (x, y) de $\mathcal{V}$ temos a seguinte fórmula de Taylor,

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

— — — — — — —

Caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$ também se denomina Fórmula de MacLaurin.

Exemplo:

$e^{xy} \approx 1 + xy + \frac{y^2}{2}$ para pontos (x, y) numa vizinhança de $(1, 0)$

$$f(x,y) = e^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$f(1,0) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + yxe^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 1$$

Sejam $w = f(u_1, \cdots, u_n)$ e $u_i = u_i(x_1, \cdots, x_m)$, $i = \overline{1, n}$, funções reais de variáveis reais.

Definição: $f(u_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, u_n(x_1, \cdots, x_m))$ é uma função composta das funções u_i, $i = \overline{1, n}$, nas variáveis x_j, $j = \overline{1, m}$.

— — — — — — —

Se as derivadas parciais das funções f e u_i, $i = \overline{1, n}$ existem e são contínuas temos que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

Sejam $z = f(u,v)$, $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ funções reais de variáveis reais.

Definição: $f(u(x,y), v(x,y))$ chama-se função composta das funções u e v, nas variáveis x e y.

— — — — — — —

Se as derivadas parciais das funções f, u e v existem e são contínuas, como podemos calcular as derivadas parciais da função composta?

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}}$$

Exemplo:

$$z = \ln(u^2+v) \ (= f(u,v)), \quad u = e^{x+y^2}, \quad v = x^2+y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}\,e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}\,2x$$

$$= \frac{2}{(e^{x+y^2})^2 + x^2 + y}((e^{x+y^2})^2 + x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}\,2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}\,1$$

$$= \frac{1}{(e^{x+y^2})^2 + x^2 + y}(4(e^{x+y^2})^2 y + 1)$$

Sejam $w = f(x, u_1, \cdots, u_n)$ e $u_i = u_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, funções reais de variáveis reais.

Definição: $f(u_1(x), \cdots, u_n(x))$ é uma função composta das funções u_i, $i = \overline{1, n}$, de uma só variável x.

— — — — — — —

Se as derivadas parciais das funções f e u_i, $i = \overline{1, n}$ existem e são contínuas temos a derivada total da função composta

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{du_i}{dx}}$$

Sejam $z = f(x, y)$ e $y = y(x)$ funções reais de variáveis reais.

Definição: $f(x, y(x))$ é uma função composta de uma só variável x.

— — — — — — —

Se as derivadas parciais da função f e a derivada da função y existem e são contínuas temos a derivada total da função composta

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}}$$

Exemplo:

$$z = x^2 + \sqrt{y} \;\; (= f(x, y)), \qquad y = \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \\ &= 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x \\ &= 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \end{aligned}$$

Definição: A função $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ diz-se na forma implícita, se é dada através da equação

$$F(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$$

não resolvida em relação à variável y.

Exemplos:

$a)$ $x^2y - x + 2y = 0$ define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(0, 0)$

$b)$ $x - y + z - \operatorname{sen}(xy - 1) = 0$ define implicitamente z como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$

Regra de cálculo da derivada de uma função dada na forma implícita $(n = 1)$

Para calcular a derivada da função $y = f(x)$, dada na forma implícita através da equação $F(x, y) = 0$, no ponto $x = x_0$, deriva-se ambas partes da equação $F(x, y) = 0$ considerando que $y = y(x)$ é uma função composta.

Exemplos:

$a)$ A equação $xy - \operatorname{sen} x + y^3 + 2y = 0$ define implicitamente uma função $y = f(x)$ numa vizinhança do ponto $(x, y) = (0, 0)$.

$$y + xy' - \cos x + 3y^2 y' + 2y' = 0'$$

$$\hookrightarrow \quad -1 + 2y'(0) = 0 \quad \hookrightarrow \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

$y''(0)$:

$$y + xy' - \cos x + 3y^2y' + 2y' = 0'$$

$\hookrightarrow$

$$y' + y' + xy'' + \operatorname{sen} x + 6y(y')^2 + 3y^2y'' + 2y'' = 0$$

$\hookrightarrow$ $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$

$\hookrightarrow$

$$2y'(0) + 2y''(0) = 0,$$

$$y''(0) = -\frac{1}{2}$$

$b)$ A equação $e^{xy} - x\cos y = 0$ define implicitamente uma função $y = f(x)$ numa vizinhança do ponto $(x, y) = (1, 0)$.

$$(y + xy')e^{xy} - \cos y + xy' \operatorname{sen} y = 0$$

$\hookrightarrow$ $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$

$\hookrightarrow$

$$y'(1) - 1 = 0,$$

$$y'(1) = 1$$

Nota:

$$y' = \frac{ye^{xy} + \cos y}{xe^{xy} + x\operatorname{sen} y}, \qquad xe^{xy} + x\operatorname{sen} y \neq 0$$

Seja $F(x, y)$ uma função definida em $D_F \subseteq \mathbb{R}^2$ com derivadas parciais contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0). Seja $(x_0, y_0) \in intD_F$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Então $F(x, y) = 0$ define implicitamente y (x)como função de x (y), numa vizinhança de (x_0, y_0).

- Se $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então $$\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

- Se $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, então $$\frac{dx}{dy}(y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}.$$

Exemplo:

A equação $xy - \operatorname{sen} x + y^3 + 2y = 0$ define implicitamente uma função $y = f(x)$ numa vizinhança do ponto $(x, y) = (0, 0)$

$$\frac{dy}{dx}(0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0)} = \frac{1}{2}$$

Regra de cálculo da derivada de uma função dada na forma implícita $(n = 2)$

Para calcular as derivadas parciais $(\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y})$ da função $z = f(x, y)$, dada na forma implícita através da equação $F(x, y, z) = 0$, no ponto $(x, y) = (x_0, y_0)$, deriva-se ambas partes da equação $F(x, y, z) = 0$ considerando que $z = z(x, y)$ é uma função composta (em relação a x e em relação a y).

Exemplo:

A equação $xye^z - z = 0$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$.

$$ye^z + xye^z z'_x - z'_x = 0$$

$$\hookrightarrow$$

$$1 - \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 0 \qquad \hookrightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 1$$

$$xe^z + xye^z z'_y - z'_y = 0$$

$$\hookrightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 0$$

Seja $F(x, y, z)$ uma função definida em $D_F \subseteq \mathbb{R}^3$ com derivadas parciais contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0, z_0). Seja $(x_0, y_0, z_0) \in intD_F$ tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Então $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente z como função de x e de y, numa vizinhança de (x_0, y_0, z_0). Se $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, então

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

Exemplo:

A equação $xye^z - z = 0$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,1,0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,1,0)} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,1,0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,1,0)} = 0$$

(Final do Capítulo 1)

1. Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$

Integral duplo

Assim como o integral definido de uma função positiva, de uma variável, representa a área entre o gráfico e o eixo x, o integral duplo de uma função positiva, de duas variáveis, representa o volume entre o gráfico e o plano que contém o seu domínio.

Seja $f(x, y)$ definida num conjunto fechado Ω, limitado pela curva plana fechada simples (sem pontos múltiplos) $\partial\Omega$. Dividimos Ω em m conjuntos limitados por curvas planas fechadas simples ω_i, $i = \overline{1, m}$.

Denotamos por $\Delta\omega_i$, $i = \overline{1, m}$, as áreas desses conjuntos.

Em cada ω_i escolhemos um ponto arbitrário (x_i, y_i).

Definição: À soma

$$S_m(f) = f(x_1, y_1)\Delta\omega_1 + \cdots + f(x_m, y_m)\Delta\omega_m$$

chama-se soma de Riemann da função f em Ω.

Consideremos uma sucessão arbitrária de somas integrais $S_{m_1}(f), \cdots, S_{m_n}(f), \cdots$ formadas por diversos cortes de Ω em conjuntos parciais ω_k e tais que o maior diâmetro dos ω_k tende para zero quando $m_n \to \infty$.

Definição: Se existir limite da sucessão $\{S_{m_i}(f)\}_{i=1}^{\infty}$ e este não depender nem do modo do corte de Ω em conjuntos parciais ω_k nem da escolha do ponto (x_i, y_i), então a esse limite vamos chamar integral duplo da função $f(x, y)$ sobre Ω e denotar por

$$\int\int_{\Omega} f(x, y)\, d\omega.$$

O integral duplo de uma função $f(x,y)$ sobre um domínio de integração Ω pode ser representado de diversas formas. Ω é representado em todos os sinais de integração ou surge abreviado no sinal de integração mais à direita.

Exemplos: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2\}$

$$\int_0^2 dy \int_0^4 f(x,y)\,dx \qquad \int_0^2 \int_0^4 f(x,y)\,dxdy$$

$$\int_0^4 dx \int_0^2 f(x,y)\,dy \qquad \int_0^4 \int_0^2 f(x,y)\,dydx$$

$$\int \int_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

Teorema: Se a função $z = f(x, y)$ for contínua em Ω, então é integrável, isto é, existe o integral duplo

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, d\omega.$$

— — — — — — —

Teorema do valor médio: Seja $f(x, y)$ uma função contínua em Ω. Então existe pelo menos um ponto $(a, b) \in \Omega$ tal que

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, d\omega = f(a, b)\mathcal{A}_{\Omega}.$$

Interpretação geométrica

Área: Qualquer soma de Riemann da função $f(x,y) \equiv 1$, em Ω,

$$S_m(1) = \triangle\omega_1 + \cdots \triangle\omega_m$$

corresponde à área de Ω, isto é,

$$\mathcal{A}_\Omega = S_m(1), \ \forall m.$$

$$\boxed{\mathcal{A}_\Omega = \int\int_\Omega d\omega}$$

Interpretação geométrica

Volume: Se $f(x,y) \geq 0,\ \forall (x,y) \in \Omega$, então o volume $\mathcal{V}$ do corpo limitado pela superfície $z = f(x,y)$, o plano $z = 0$ e a superfície cilindrica cujas geratrizes são paralelas ao eixo Oz e se apoiam sobre a fronteira de Ω é nos dado pelo integral duplo

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)d\omega.$$

$$\boxed{\mathcal{V} = \int\int_{\Omega} f(x,y)d\omega}$$

Propriedades do integral duplo

◇ $\forall f$ integrável em Ω, $\forall K \in \mathbb{R}$

$$\int\int_{\Omega} K\, f(x,y)d\omega = K \int\int_{\Omega} f(x,y)d\omega$$

◇ $\forall f, g$ integráveis em Ω

$$\int\int_{\Omega} [f(x,y) \pm g(x,y)]d\omega = \int\int_{\Omega} f(x,y)d\omega \pm \int\int_{\Omega} g(x,y)d\omega$$

◇ $\forall f$ integrável em Ω, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 e Ω_2 sem pontos interiores comuns

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)d\omega = \int\int_{\Omega_1} f(x,y)d\omega + \int\int_{\Omega_2} f(x,y)d\omega$$

- Se $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$, então
$$\int\int_{\Omega} f(x,y)d\omega \leq \int\int_{\Omega} g(x,y)d\omega$$
- Se $m \leq f(x,y) \leq M$, $\forall (x,y) \in \Omega$, então
$$m\mathcal{A}_{\Omega} \leq \int\int_{\Omega} f(x,y)d\omega \leq M\mathcal{A}_{\Omega}$$
- $$\left|\int\int_{\Omega} f(x,y)d\omega\right| \leq \int\int_{\Omega} |f(x,y)|d\omega$$

Cálculo de integrais duplos

Ω - domínio retangular

Teorema: Se $f(x,y)$ é uma função contínua no retângulo $\Omega=[a,b]\times[c,d]$, então

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

Exemplos: $\Omega=[-1,1]\times[2,3]$

a) $\mathcal{A}_\Omega=\int_{-1}^{1}dx\int_2^3 dy=\int_2^3 dy\int_{-1}^{1}dx=2$

b) $\int\int_{\Omega}(x+y^2)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_2^3(x+y^2)\,dy=\cdots=\frac{38}{3}$

Ω - domínio regular

Sejam $y = c(x)$ e $y = d(x)$ duas funções contínuas sobre o segmento $[a, b]$, $a < b$, e tais que $c(x) \leq d(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Definição: Ao conjunto Ω que é limitado pelas curvas $y = c(x)$ e $y = d(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$ chama-se domínio regular segundo o eixo Oy.

Teorema: Se $f(x, y)$ é uma função contínua no domínio regular Ω segundo o eixo Oy, então

$$\int\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy.$$

Exemplos:

1. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < x < 1, \; 0 < y < x\}$

   a) $$\int_0^1 dx \int_0^x dy \;\; (= \mathcal{A}_\Omega)$$

   b) $$\int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2+1}\, dy$$

2. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 < x < 2, \; x^2 < y < x+2\}$

   $$\int_1^2 dx \int_{x^2}^{x+2} \frac{1}{y^2}\, dy$$

Sejam $x = a(y)$ e $x = b(y)$ duas funções contínuas sobre o segmento $[c, d]$, $c < d$, e tais que $a(y) \leq b(y)$, $\forall y \in [c, d]$.

Definição: Ao conjunto Ω que é limitado pelas curvas $x = a(y)$ e $x = b(y)$ e pelas retas $y = c$ e $y = d$ chama-se domínio regular segundo o eixo Ox.

Teorema: Se $f(x, y)$ é uma função contínua no domínio regular Ω segundo o eixo Ox, então

$$\int\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx.$$

Exemplos:

1. $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x < 1,\ 0 < y < 1\}$

   a) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 dx \ \ (= \mathcal{A}_\Omega)$

   b) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

2. $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < \sqrt{y},\ 0 < y < 1\}$

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} (xy + x + y)\, dx$$

Definição: Um domínio regular segundo os dois eixos de coordenadas chama-se domínio regular.

Teorema: Se $f(x, y)$ é uma função contínua no domínio regular Ω, então

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx.$$

Caso geral:

Se o domínio Ω for constituído por n domínios regulares segundo Ox ou Oy tal que $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$ não têm pontos interiores comuns, então

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \cdots\cdots + \iint_{\Omega_n} f(x,y)dxdy$$

e cada integral da parte direita da última igualdade pode ser calculado através de uma das fórmulas anteriores.

Integrais duplos em coordenadas polares

A mudança de variáveis para coordenadas polares são particularmente vantajosas quando a função integranda envolve a expressão $x^2 + y^2$ e para regiões delimitadas por

- ◇ retas que passam na origem
- ◇ por circunferências

Se (ρ, θ) está escrito em coordenadas polares, então em coordenadas cartesianas temos (x, y) em que

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\theta \end{cases}, \quad \rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\int\int_{\Omega_{x,y}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\Omega_{\rho,\theta}} f[\rho\cos\theta, \rho\mathrm{sen}\theta]\rho\, d\rho d\theta$$

— — — — — — —

Exemplo:

$$\Omega_{x,y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3,\ \ y \leq 0,\ \ x \geq 0\}$$

$$\int\int_{\Omega_{x,y}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\int_{\Omega_{\rho,\theta}} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho d\theta$$

$$\Omega_{\rho,\theta} = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \rho \leq \sqrt{3},\ \ \frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi\}$$

Integral triplo

Seja $f(x, y, z)$ definida num conjunto fechado V, limitado pela superfície S. Dividimos V em m conjuntos limitados por superfíces v_i, $i = \overline{1, m}$.

Denotamos por Δv_i, $i = \overline{1, m}$, os volumes desses conjuntos.

Em cada v_i escolhemos um ponto arbitrário (x_i, y_i, z_i).

Definição: À soma

$$S_m(f) = f(x_1, y_1, z_1)\Delta v_1 + \cdots + f(x_m, y_m, z_m)\Delta v_m$$

chama-se soma de Riemann da função f em V.

Consideremos uma sucessão arbitrária de somas integrais $S_{m_1}(f), \cdots, S_{m_n}(f), \cdots$ formadas por diversos cortes de V em conjuntos parciais v_k e tais que o maior diâmetro dos v_k tende para zero quando $m_n \to \infty$.

Definição: Se existir limite da sucessão $\{S_{m_i}(f)\}_{i=1}^{\infty}$ e este não depender nem do modo do corte de V em conjuntos parciais v_k nem da escolha do ponto (x_i, y_i, z_i), então a esse limite vamos chamar integral triplo da função $f(x, y, z)$ sobre V e denotar por

$$\int\int\int_V f(x, y, z)\, dv.$$

O integral triplo de uma função $f(x,y,z)$ sobre um domínio de integração V pode ser representado de diversas formas. V é representado em todos os sinais de integração ou surge abreviado no sinal de integração mais à direita.

Exemplos:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2, 3 \le z \le 7\}$$

$$\int_0^2 dy \int_0^4 dx \int_3^7 f(x,y,z)\, dz \qquad \int\int\int_V f(x,y,z)\, dxdydz$$

Teorema: Se a função $z = f(x, y, z)$ for contínua em V, então é integrável, isto é, existe o integral triplo

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv.$$

— — — — — — —

Teorema do valor médio: Seja $f(x, y, z)$ uma função contínua em V. Então existe pelo menos um ponto $(a, b, c) \in V$ tal que

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = f(a, b, c)\mathcal{V}.$$

Interpretação geométrica

Área: Qualquer soma de Riemann da função $f(x,y,z) \equiv 1$, em V,

$$S_m(1) = \triangle v_1 + \cdots \triangle v_m$$

corresponde ao volume de V, isto é,

$$\mathcal{V} = S_m(1), \ \forall m.$$

$$\boxed{\mathcal{V} = \int\int\int_V dv}$$

Propriedades do integral triplo

- $\forall f$ integrável em V, $\forall K \in \mathbb{R}$

$$\iiint\limits_V K\, f(x,y,z)dv = K \iiint\limits_V f(x,y,z)dv$$

- $\forall f, g$ integráveis em V

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dv$$

$$= \iiint\limits_V f(x,y,z)dv \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)dv$$

◇ $\forall f$ integrável em V, $V = V_1 \cup V_2$, V_1 e V_2 sem pontos interiores comuns

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dv$$

$$= \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dv + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dv$$

◇ Se $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in V$, então

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dv \leq \iiint\limits_{V} g(x,y,z)\,dv$$

- Se $m \leq f(x,y,z) \leq M$, $\forall (x,y,z) \in V$, então

$$m\mathcal{V} \leq \int\int\int_V f(x,y,z)dv \leq M\mathcal{V}$$

- $$\left|\int\int\int_V f(x,y,z)dv\right| \leq \int\int\int_V |f(x,y,z)|dv$$

Cálculo de integrais triplos

Ω - domínio paralelepípedal

Teorema: Se $f(x,y,z)$ é uma função contínua no paralelepípedo $V = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, então

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)\, dz.$$

Exemplos: $V = [0,1] \times [2,4] \times [0,3]$

$a)$ $\mathcal{V} = \int_0^1 dx \int_2^4 dy \int_0^3 dz = 6$

$b)$ $\int_0^1 dx \int_2^4 dy \int_0^3 (x+y+z)\, dz = 30$

V - domínio regular

Domínio regular são conjuntos que podem ser representados na forma:

$$V = [a, b] \times [c(x), d(x)] \times [e(x, y), f(x, y)]$$

ou

$$V = [a(y), b(y)] \times [c, d] \times [e(x, y), f(x, y)],$$

ou qualquer outra forma análoga onde um dos segmentos tem limites constantes, outro tem limites que são funções de uma variável definida no segmento com limites constantes e o terceiro segmento tem limites que são funções de duas variáveis sendo cada uma delas definida num dos segmentos anteriores. Por exemplo,

Teorema: Se $f(x,y,z)$ é uma função contínua no domínio regular

$$V = [a(y,z), b(y,z)] \times [c(z), d(z)] \times [e, f],$$

então

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f dz \int_{c(z)}^{d(z)} dy \int_{a(y,z)}^{b(y,z)} f(x,y,z)\,dx.$$

Exemplo:

$$V = [0,1] \times [0,1] \times [0,xy]$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{xy} xy\,dz = \frac{1}{9}$$

Curvas

No plano $\mathbb{R}^2$ com o sistema de coordenadas OXY vamos considerar uma função vetorial

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}, \qquad (*)$$

onde $\overrightarrow{i} = (1,0)$ e $\overrightarrow{j} = (0,1)$ é uma base do espaço $\mathbb{R}^2$.

Quando t varia, as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ variam e a extremidade do raio vetor $\overrightarrow{r}(t)$ descreve no plano uma determinada curva L.

Definição: Às equações $(*)$ chamam-se equações vetoriais da curva.

Exemplos:

1) $\overrightarrow{r}(t) = (t, 2t+3), \quad t \in [0,1]$

$\hookrightarrow$ segmento de reta

2) $\overrightarrow{r}(t) = (t, 2t+3), \quad t \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ reta

3) $\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t), \quad t \in [0, 2\pi]$

$\hookrightarrow$ circunferência

Comprimento de uma curva

Seja L uma curva definida através da equação vetorial

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t)),\ \alpha \leq t \leq \beta,$$

com $x(t)$ e $y(t)$ diferenciáveis.

O comprimento da curva L é dado pela fórmula

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

No espaço $\mathbb{R}^3$ com o sistema de coordenadas $OXYZ$ vamos considerar uma função vetorial

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}, \qquad (*)$$

onde $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ é uma base do espaço $\mathbb{R}^3$.

Quando t varia, as coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ variam e a extremidade do raio vetor $\overrightarrow{r}(t)$ descreve no espaço uma determinada curva L.

Definição: Às equações $(*)$ chamam-se equações vetoriais da curva.

Exemplo:

1) $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$

2) $\overrightarrow{r}(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in [-1, 2]$

3) $\overrightarrow{r}(t) = (e^t, t, t-1), \quad t \in [0, 1]$

Comprimento de uma curva

Seja L uma curva definida através da equação vetorial

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \ \alpha \leq t \leq \beta,$$

com $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ diferenciáveis.

O comprimento da curva L é dado pela fórmula

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

Superfícies

Diz-se que uma reta é tangente a uma superfície, num ponto (x_0, y_0, z_0) se é tangente a qualquer curva traçada sobre esta superfície e que passe pelo ponto.

Seja (x_0, y_0, z_0) um ponto da superfície

$$F(x, y, z) = 0$$

onde $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ são contínuas e

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \vee \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \vee \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Teorema: Todas as retas tangentes à superfície $F(x, y, z) = 0$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pertencem a um mesmo plano.

Definição: Ao plano formado pelas retas tangentes à superfície $F(x, y, z) = 0$ no ponto (x_0, y_0, z_0) chama-se plano tangente à superfície no ponto e é definido pela equação

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Exemplo:

Plano tangente à superfície $x + y + z = 1$, no ponto $(1, 0, 0)$:

$$1(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0,$$

ou seja,

$$x + y + z = 1.$$

$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$

$$F(x,y,z) = x + y + z - 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,0,0) = 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,0) = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,0) = 1$$

Nota: A superfície é um plano!

Definição: Chama-se reta normal à superfície

$$F(x, y, z) = 0$$

no ponto (x_0, y_0, z_0) à reta perpendicular ao plano tangente nesse ponto e é definida pelas equações

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

— — — — — — —

Se $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$, então

$$x = x_0 \ \wedge \ \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

Se $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$, então

$$y = y_0 \;\wedge\; \frac{x - x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

Se $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$, então

$$z = z_0 \;\wedge\; \frac{x - x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}$$

Exemplo:

Reta normal à superfície $x + y + z = 1$, no ponto $(1, 0, 0)$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1},$$

ou seja,

$$x - 1 = y = z.$$

Cálculo da área da superfície $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$

$$A_S = \int\int_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Exemplo:

Superfície de uma esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 5 $(x^2 + y^2 + z^2 = 25)$.

$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} (= \varphi(x,y))$, para $z = 0$ temos Ω círculo de centro $(0,0)$ e raio 5

$$A_S = 2\int_{-5}^{5} dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dy = 100\pi$$

Elementos da teoria do campo

Definição: Chama-se **gradiente** da função $f(x, y)$ ao vetor

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j}\,.$$

Definição: Chama-se **gradiente** da função $f(x, y, z)$ ao vetor

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}\,.$$

Exemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$

$$\operatorname{grad} f(1,1,0) = (2,2,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) = 2, \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = 2, \;\; \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = 1$$

Definição: Chama-se derivada da função $f(x,y)$, no ponto (x_0,y_0), segundo a direção $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2)$ (ou derivada dirigida) a

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{u_1}{\|\overrightarrow{u}\|}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{u_2}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

$$\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

Definição: Chama-se derivada da função $f(x, y, z)$, no ponto (x_0, y_0, z_0), segundo a direção $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ (ou derivada dirigida) a

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\frac{u_1}{\|\overrightarrow{u}\|} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\frac{u_2}{\|\overrightarrow{u}\|} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{u_3}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Teorema: A derivada da função $f(x, y)$ num ponto (x_0, y_0) segundo a direção $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ admite um valor máximo quando a direcção de $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ coincide com a do gradiente e este valor máximo é igual a $\|\mathrm{grad} f(x_0, y_0)\|$.

Teorema: A derivada da função $f(x, y, z)$ num ponto (x_0, y_0, z_0) segundo a direção $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ admite um valor máximo quando a direcção de $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ coincide com a do gradiente e este valor máximo é igual a $\|\mathrm{grad} f(x_0, y_0, z_0)\|$.

Exemplo:

A derivada dirigida máxima da função

$$f(x, y) = \ln x + \ln y,$$

no ponto $(e, 1)$ é

$$\sqrt{\left(\frac{1}{e}\right)^2 + 1}.$$

Integral curvilíneo

Seja $P(x, y)$ uma função contínua num domínio Ω do plano XOY e $L \subset \Omega$ uma curva definida de um ponto (a, b) a um ponto (c, d). Dividimos a curva L em m partes arbitrárias pelos pontos A_i, $i = \overline{0, m}$, $(a, b) = (x_0, y_0)$, $(c, d) = (x_m, y_m)$.

Denotamos por

$$A_i = (x_k, y_k) \quad e \quad \triangle x_k = x_{k+1} - x_k, \; k = \overline{0, m-1},$$

Em cada arco da curva L que liga os pontos A_k e A_{k+1} escolhemos um ponto arbitrário $\widetilde{A_k} = (\widetilde{x_k}, \widetilde{y_k})$ arbitrário.

Definição: À soma

$$S_m = P(\widetilde{x_1}, \widetilde{y_1})\Delta x_1 + \cdots + P(\widetilde{x_m}, \widetilde{y_m})\Delta x_m$$

chama-se soma integral da função $P(x, y)$ na curva L em relação ao eixo OX.

Consideremos uma sucessão arbitrária de somas integrais $S_{m_1}, \cdots, S_{m_n}, \cdots$ formadas por diversos cortes de L em arcos parciais e tais que o maior dos números $|\triangle x_k|$ tende para zero quando $m_n \rightarrow \infty$.

Definição: Se existir limite da sucessão $\{S_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ e este não depender nem do modo do corte de L em arcos parciais nem da escolha dos pontos $\widetilde{A}_k$, então a esse limite vamos chamar integral curvilíneo da função $P(x,y)$ sobre a curva L em relação ao eixo $0X$ e denotar por

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx.$$

Analogamente, podemos definir integral curvilíneo da função $Q(x, y)$ sobre a curva L em relação ao eixo $0Y$ e denotar por

$$\int_L Q(x, y)\, dy.$$

Definição: Chama-se integral curvilíneo do par de funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sobre a curva L a

$$\int_L P(x, y)\, dx + \int_L Q(x, y)\, dy = \int_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Analogamente, define-se integral curvilíneo sobre a curva espacial L:

$$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + \int\limits_L Q(x,y,z)\,dy + \int\limits_L R(x,y,z)\,dz$$

$$= \int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,x)\,dz.$$

Propriedades do integral curvilíneo

◇ $$\int_{L_{A,B}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy = -\int_{L_{B,A}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

◇ $$\int_{L_{A,B}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,x)\,dz$$
$$= -\int_{L_{B,A}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,x)\,dz$$

◇ $L = L_1 \cup L_2$

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$$= \int_{L_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int_{L_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

◇ $L = L_1 \cup L_2$

$$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,x)\,dz$$

$$= \int\limits_{L_1} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,x)\,dz$$

$$+ \int\limits_{L_2} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,x)\,dz$$

Existência e cálculo de integrais curvilíneos

Suponhamos a curva plana L dada sob a forma paramétrica

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$$

é tal que, quando o parâmetro t se desloca de α até β, o ponto $(x(t), y(t))$ percorre toda a curva L no sentido indicado.

Notemos que α pode ser maior que β.

Vamos supor também que as funções $x(t)$ e $y(t)$ têm derivadas contínuas.

Teorema: Se as funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ forem contínuas ao longo da curva L, então o integral curvilíneo

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

existe e é igual a

$$\int\limits_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt.$$

Analogamente, no caso da curva espacial L dada sob a forma paramétrica

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

é tal que, quando o parâmetro t se desloca de α até β, o ponto $(x(t), y(t), z(t))$ percorre toda a curva L no sentido indicado. Vamos supor também que as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ têm derivadas contínuas.

$$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,dt$$

Exemplo:

Para $L: \ \overrightarrow{r}(t) = (t, t^2, t^3), \ t \in [0,1]$

$$\int_L (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$$

$$= \int_0^1 [(t^4 - t^6).1 + 2.t^2.t^3.2t - t^2.3.t^2]\,dt$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)\,dt = \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{35}$$

$\Omega \hookrightarrow$ conjunto fechado

$P(x,y)$, $Q(x,y) \hookrightarrow$ contínuas

$\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \hookrightarrow$ contínuas

Fórmula de Green:

$$\int_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Exemplo:

L curva que delimita o retângulo com vértices $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,3)$ e $D = (0,3)$

$$\int\limits_L x^2 e^y\, dx + y^2 e^x dy = \int_0^2 dx \int_0^3 (y^2 e^x - x^2 e^y)\, dy$$

$$= \int\limits_0^2 (9e^x - x^2 e^3 + x^2)\, dt = \left(9e^x - \frac{1}{3}x^3 e^3 + \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^2$$

$$= 9e^2 - \frac{8}{3}e^3 + \frac{8}{3} - 9$$

Área de uma região plana

$$A_\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} -y\,dx + x\,dy$$

Exemplo:

Área delimitada pela elipse $x^2 + 4y^2 = 4$:

$\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t, \mathrm{sen} t),\ \ t \in [0, 2\pi]$

$$A_\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} -y\,dx + x\,dy = \int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi$$

Condições para que um integral curvilíneo não dependa do caminho de integração

Seja Ω um conjunto simplesmente conexo (i.e., toda a curva simples fechada contida em Ω envolve somente pontos de Ω).

Lema: O integral sobre uma curva que une dois pontos de Ω, $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$, não depende do caminho seguido, mas somente destes dois pontos se e só se este integral é nulo sobre qualquer curva fechada.

Se o integral curvilíneo sobre uma curva que une dois pontos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ não depender do caminho seguido, então podemos escrever este integral na forma

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Seja Ω um conjunto simplesmente conexo.

Sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ funções contínuas com derivadas parciais $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ contínuas em Ω.

Teorema: Para que o integral curvilíneo sobre qualquer curva fechada $L \subset \Omega$ seja nulo é necessário e suficiente que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \forall (x,y) \in \Omega.$$

As funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ determinam o campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

no conjunto Ω.

Lema: O campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ é potencial se e só se as funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ satisfazerem a condição

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \forall (x,y) \in \Omega.$$

Se o campo $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ for potencial e $U(x,y)$ for o potencial deste campo, i.e., se

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{e} \quad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y},$$

então

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} dU$$

$$= U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0).$$